

Una nueva aproximación para la evaluación del golpe de ariete incluyendo la condición inicial de presurización de la instalación y del fluido

A new approach for evaluating water hammer including the initial state of pressurization of the installation and fluid

Kaless, G.

Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Departamento de Ingeniería Civil Orientación Hidráulica, Belgrano y 9 de Julio - (9100) Trelew – Chubut, Argentina. E-mail: gkaless@ing.unp.edu.ar

Recibido: 06/04/2015

Aceptado: 12/04/2016

Publicado: 28/04/2016

RESUMEN

El fenómeno del golpe de ariete es conocido desde el siglo XIX y su formulación matemática, en término de ecuaciones diferenciales, se debe a los trabajos de Allievi (1903) y otros investigadores de principio del siglo XX. Las ecuaciones presentes en la literatura técnica actual generan un fenómeno anómalo de golpe de ariete cuando se considera la condición inicial definida por un fluido incompresible y tubería rígida. La solución correcta implica resolver las ecuaciones del golpe de ariete para el estado inicial. Esto conduce, mediante el método de diferencias finitas, a un sistema de ecuaciones no lineales. Se propone una nueva aproximación que incluye el estado de presurización inicial en las ecuaciones del golpe de ariete simplificando el cálculo de las condiciones iniciales. Además se realiza una lectura crítica de la deducción presente en la literatura, señalando las inconsistencias conceptuales y proponiendo correcciones.

Palabras clave | Golpe de ariete; Escurremientos a presión; Régimen transitorio; Condiciones iniciales.

ABSTRACT

The water hammer phenomenon is well known since the 19th century, while its mathematical formulation, by means of differential equations, is due to works of researchers such as Allievi (1903) and others from the beginning of the 20th century. The equations found in the technical publications produce a strange water hammer when the initial condition is defined assuming an incompressible fluid and a rigid pipe. The correct solution requires solving the water hammer equations for the initial state. When the finite difference method is applied, the initial state is solved by means of a set of non-linear equations. A novel approach is proposed including the initial state of pressurization into the governing equations and hence simplifying the calculus of the initial conditions. Furthermore, a critical reading of the deduction of the equations is done pointing out conceptual inconsistencies and proposing corrections.

Key words | Water hammer; Pressurized flows; Transient state; Initial conditions.

INTRODUCCIÓN

El fenómeno del golpe de ariete es muy común en instalaciones hidráulicas con flujos a presión. Se caracteriza por el aumento brusco en la presión ante un descenso brusco de la velocidad del fluido en la tubería, la onda de presión producida se propaga por la instalación a la velocidad del sonido dando lugar a complejos patrones de interferencia por la reflexión de la onda donde hay cambios de sección o bifurcaciones. También es común observar cambios de fase del fluido cuando la presión alcanza la presión de vapor. El golpe de ariete se genera cuando en algún punto de la conducción se produce un cambio brusco en las propiedades del escurrimiento (presión o velocidad), por ejemplo, al maniobrar las válvulas que controlan el caudal en una conducción, o con el cambio en el funcionamiento de bombas y turbinas. Dada la magnitud de los cambios en el comportamiento del fluido, el fenómeno debe ser considerado a la hora de diseñar una instalación hidráulica y, actualmente, forma parte de la práctica usual de la ingeniería hidráulica.

El golpe de ariete también ha sido utilizado en aplicaciones prácticas tales como la bomba de ariete. Este dispositivo está diseñado para elevar agua a un nivel superior aprovechando la energía cinética del fluido. De este modo, la bomba no necesita de una fuente de energía exterior. La primera bomba fue patentada en 1796 por el francés Joseph Michel Montgolfier.

Los primeros estudios sistemáticos del golpe de ariete se remontan al final del siglo XIX. En 1898 Joukowsky propuso una expresión fundamental que vincula el cambio en la presión (Δp) con el cambio en la velocidad del fluido (Δu):

$$\Delta p = \rho c \Delta u \quad (I)$$

En donde ρ es la densidad del fluido y c es la velocidad de la onda de presión. Esta expresión también fue propuesta independientemente por Allievi (1903) y por Frizell (1898), aunque ellos no presentaron evidencias experimentales. La velocidad del sonido que se propaga en un fluido dentro de una conducción fue establecida por Korteweg (1878):

$$c = \sqrt{\frac{K^*}{\rho}} \quad (II)$$

$$K^* = \frac{K}{1 + \frac{DK}{eE}} \quad (III)$$

En donde K es el módulo de compresibilidad del fluido, E es el módulo de elasticidad del material de la conducción, e es el espesor de la tubería, y D , su diámetro. Joukowsky, reconocido por sus investigaciones en aerodinámica, también desarrolló las expresiones anteriores a partir de mediciones en largas conducciones metálicas. Además deben reconocerse los aportes del fisiólogo Kries, contemporáneo de Joukowsky, quién llegó a las mismas expresiones estudiando ondas más lentas en conductos de goma, más similares a las condiciones del sistema circulatorio humano (Tijsseling y Anderson, 2007).

A partir de la popularización de las computadoras, la mecánica de fluidos computacional ha cobrado un papel cada vez más importante en las aplicaciones de la ingeniería. Los métodos numéricos son fácilmente implementados en algoritmos que resuelven las ecuaciones del golpe de ariete permitiendo a los ingenieros explorar múltiples escenarios de funcionamiento de una instalación. Las ecuaciones diferenciales que describen el fenómeno se prestan muy bien a su resolución mediante el método de las características aunque los métodos de diferencias finitas tanto explícitos como implícitos también se han popularizado (Hoffman 2001; Chadwick *et al.*, 2013; Chaudry, 2014). Además, la complejidad del fenómeno ha motivado el desarrollo de nuevas líneas de investigación en el campo de la hidráulica. La investigación actual se focaliza en cuantificar el efecto en la atenuación del golpe de ariete producido por el comportamiento viscoelástico del material de la tubería, por pérdidas y obstrucciones en la tubería y por la interacción entre la estructura y el fluido (Bergant *et al.*, 2008a, 2008b). Otros aspectos de la investigación incluyen el cambio de fase y cavitación (Karadzic *et al.*, 2014), la variación temporal de la fricción (Bergant y Simpson, 1994; Bergant *et al.*, 2001), el diseño de dispositivos para la prevención del golpe de ariete (Choon *et al.*, 2012), el estudio de la generación del golpe de ariete durante la fase de llenado de las tuberías (Fuertes *et al.*, 1997; Zhou *et al.*, 2002; Hou *et al.*, 2014), y el golpe de ariete en instalaciones complejas (Wang *et al.*, 2014).

A diferencia de las líneas de investigación antes referidas, en el presente trabajo se estudiarán aspectos conceptuales de las ecuaciones básicas del fenómeno del golpe de ariete. Durante la implementación de un código para resolver las ecuaciones del golpe de ariete se detectó un débil fenómeno transitorio en una instalación que se encontraba en régimen permanente y no existía

perturbación alguna al flujo. Esta anomalía fue el motivo para realizar una revisión conceptual de la derivación de las ecuaciones del golpe de ariete. Los objetivos del presente trabajo son: a) revisar el desarrollo teórico presente en la literatura actual y b) proponer una nueva deducción de las ecuaciones que incluyen el estado inicial de presurización.

CASO DE ESTUDIO

Se presentará una instalación hidráulica, correspondiente al tramo de tubería forzada del Complejo Hidroeléctrico Futaleufú (Provincia del Chubut – Rep. Argentina) a fin de ejemplificar la anomalía antes mencionada. La instalación a estudiar tiene inicio en la progresiva 1664 m sitio donde concluye la tubería de aducción al conectarse con la chimenea de equilibrio. Seguidamente prosigue la tubería forzada con fuerte pendiente (inclinación de 30.7°), excavada en el macizo rocoso y revestida de acero. Luego de 208.00 m la tubería cambia de dirección prosiguiendo horizontal, con una longitud de 38.00 m, hasta la casa de máquinas. El diámetro de la tubería es de 7.70 m. En la casa de máquinas se encuentran cuatro turbinas Francis con caudal nominal de $90.0 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ y caudal máximo de $105.0 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Para las condiciones nominales de funcionamiento se considera un nivel piezométrico a cota 490.00 m en la sección de la chimenea de equilibrio y un caudal de $360.0 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

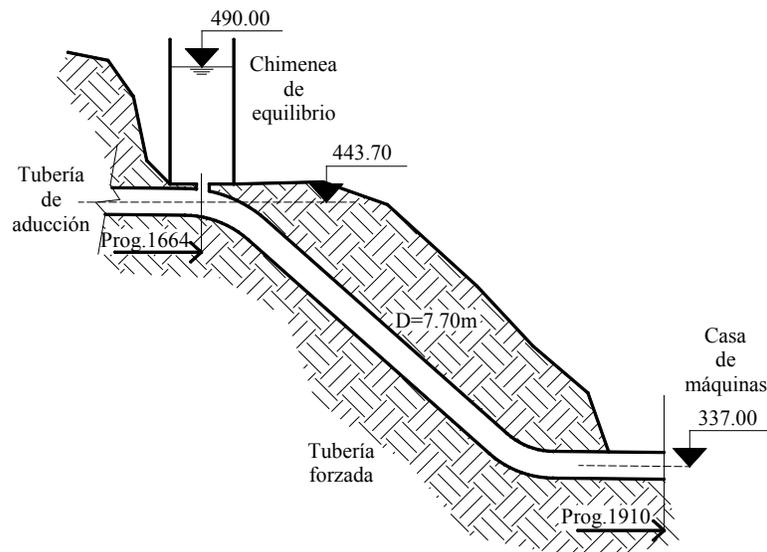


Figura 1 | Esquema del tramo de instalación del complejo hidroeléctrico que se analizará.

La ecuación del golpe de ariete expresada en términos de las curvas características es:

$$\lambda \frac{dh}{dt} + \frac{1}{g} \frac{du}{dt} - \lambda u \frac{dz}{dx} + j = 0 \quad (1)$$

En donde λ es un factor con valor $\pm 1/c$ según se trate de la característica positiva o negativa, respectivamente; H es la altura piezométrica, $H = z + p/\gamma$, con z , la elevación del eje de la tubería; p , la presión y γ , el peso específico del agua; u es la velocidad media en la sección y j es la pérdida de energía por unidad de longitud. Se implementó un programa con las ecuaciones del golpe de ariete discretizadas aplicando el método de diferencias finitas. La tubería fue dividida en N tramos delimitados por $N+1$ nodos. Considerando la sección k -sima de la conducción, de la Ecuación (1) surgen dos ecuaciones, una para la característica positiva ($dx/dt = u + c$):

$$H_k^{t+\Delta t} - H_{k-1}^t + \frac{c}{g} (u_k^{t+\Delta t} - u_{k-1}^t) - \frac{u_{k-1}^t (z_k - z_{k-1})}{g \Delta x} \Delta t + \frac{f}{2gD} u_{k-1}^t |u_{k-1}^t| \Delta x = 0 \quad (2)$$

Y otra para la característica negativa ($dx/dt = u - c$):

$$H_k^{t+\Delta t} - H_{k+1}^t - \frac{c}{g}(u_k^{t+\Delta t} - u_{k+1}^t) - \frac{u_{k+1}^t(z_{k+1} - z_k)}{g \Delta x} \Delta t + \frac{f}{2gD} u_{k+1}^t |u_{k+1}^t| \Delta x = 0 \quad (3)$$

En donde el subíndice indica el nodo de la discretización espacial (k varía entre 0 y N , con 0 el extremo de aguas arriba y N , el de aguas abajo), mientras que el superíndice indica el instante de tiempo. Las condiciones de borde consisten en especificar la altura piezométrica en el extremo de aguas arriba y la velocidad del fluido, aguas abajo.

$$H_0^t = z_{PA} \quad (4)$$

$$u_N^t = Q_N / \Omega \quad (5)$$

Aguas arriba, la altura del pelo de agua en la chimenea de equilibrio (z_{PA}) se supone que permanece constante durante el breve periodo de la simulación, que será de un par de segundos. La velocidad aguas abajo también permanecerá constante, siendo igual al caudal nominal turbinado (Q_N) dividido por el área de la conducción (Ω).

Para establecer la condición inicial del sistema se supone que se encuentra en régimen estacionario, para lo cual se deben resolver las Ecuaciones (2) y (3) imponiendo que $H_k^{t+\Delta t} = H_k^t$ para $k = 1 \dots N$ y $u_k^{t+\Delta t} = u_k^t$ para $k = 0 \dots N - 1$. De este modo, se tiene un total de $2 \cdot N$ ecuaciones no lineales con $2 \cdot N$ incógnitas, que se resuelven en modo iterativo aplicando el método de Newton-Raphson (Hoffman, 2001).

Otra solución más simple consiste en utilizar las expresiones del régimen permanente:

$$u_k^0 = Q_N / \Omega \quad (6)$$

$$H_k^0 = z_{PA} - \frac{f}{2gD} (u_k^0)^2 (\Delta x \cdot k) \quad (7)$$

La conducción fue dividida en 20 tramos de 12.30 m de longitud. El coeficiente de fricción f fue calculado utilizando a la ecuación de Colebrook-White y usando la velocidad inicial ($f = 0.008$). La Figura 2 muestra el resultado de la simulación de 2 segundos. La Corrida N° 1 corresponde a la condición inicial estimada por las ecuaciones del régimen permanente (6) y (7). Se observa claramente que se produce un fenómeno transitorio, donde la altura piezométrica fluctúa entre un valor mínimo de 488.65 m y un máximo de 489.79 m, en el extremo de aguas abajo de la conducción. La Corrida N° 2 fue inicializada con los valores de H y u que resultan de resolver las Ecuaciones (2) y (3). Como se observa en la Figura 2, la segunda corrida produce el resultado correcto, a saber, que el escurrimiento que se encuentra inicialmente en régimen estacionario permanece en dicho estado mientras no se produzcan alteraciones en las condiciones de borde, por ejemplo, en la regulación de caudal en las turbinas.

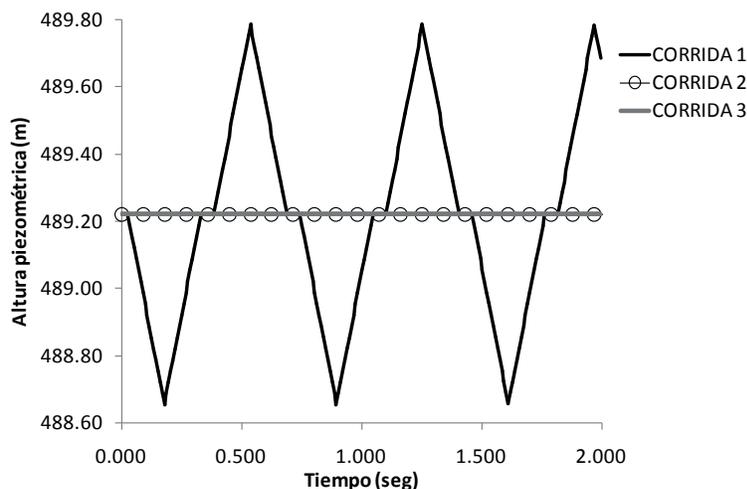


Figura 2 | Evolución en el tiempo de la altura piezométrica en el extremo de aguas abajo de la tubería forzada. En la Corrida N° 1 la condición inicial se definió con las ecuaciones del régimen estacionario. En la Corrida N° 2 se resolvieron las ecuaciones del golpe de ariete imponiendo que las derivadas temporales parciales de H y u deben ser nulas; y en la Corrida N° 3 se aplicaron las ecuaciones propuestas en este trabajo.

La diferencia entre las Corridas 1 y 2 se expone en la Figura 3. Para la Corrida 2, la velocidad disminuye en el sentido del escurrimiento mientras que en la Corrida 1, se mantiene constante según la Ecuación (6). Esto se debe a la compresibilidad del fluido que se incluye en la formulación de las Ecuaciones (2) y (3), pero no en las Ecuaciones (6) y (7), situación ya observada por Chaudry (2014). Cuando la presión aumenta, en el sentido del escurrimiento, la densidad del fluido también aumenta, entonces, el fluido debe reducir la velocidad conforme se presuriza para que se verifique la conservación de la masa. La diferencia entre velocidades en el extremo de aguas arriba y aguas abajo es muy pequeña, según la Figura 3, es de aproximadamente $4 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$. Aunque este valor es muy pequeño, dada la elevada velocidad del flujo ($u = 7.73 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$) y la alta rigidez de la tubería, al estar confinada en el macizo rocoso (celeridad de $1452 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$), el fenómeno transitorio generado por las condiciones iniciales que suponen fluido incompresible (Ecuaciones (6) y (7)), posee una amplitud de 1.20 m en términos de altura piezométrica.

Si bien la perturbación introducida por el uso de las Ecuaciones (6) y (7), que son de aplicación directa frente a las Ecuaciones (2) y (3), es de entidad pequeña y existen otros factores cuya incertidumbre es más relevante (presencia de aire o gases disueltos e interacción de la estructura con el fluido que influyen sobre celeridad; variabilidad del factor de fricción; entre otros), se propone revisar el desarrollo conceptual de las ecuaciones de golpe de ariete a fin de incorporar la condición inicial de presurización del fluido y deformación elástica de la tubería, en un modo sencillo comparable al uso de las Ecuaciones (6) y (7).

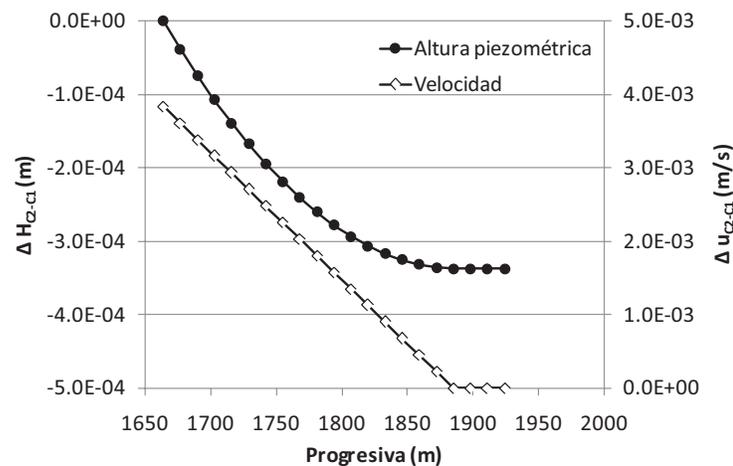


Figura 3 | Comparación de las condiciones iniciales de las Corridas 1 y 2. Se muestra la diferencia en altura piezométrica H y velocidad u , entre la Corrida 2 que considera la compresibilidad del fluido y la Corrida 1 donde se asume fluido incompresible.

ANÁLISIS DE LA DEDUCCIÓN EN LA LITERATURA ACTUAL

Se analizará en primer término la deducción de la ecuación de continuidad y cantidad de movimiento disponible en la literatura, haciendo una lectura crítica considerando conceptos claves tales como curvas características, volumen de control, volumen material y teorema de transporte de Reynolds.

La deducción de las ecuaciones del golpe de ariete presente en la literatura actual es bastante uniforme (Pérez Farrás y Guitelman, 2005; Chadwick *et al.*, 2013; Chaudry, 2014; Mambretti, 2015). Se presentará aquí una formulación resumida poniendo énfasis en la discusión de los rasgos conceptuales más importantes.

Considérese un volumen de control definido por dos secciones transversales, espaciadas una distancia infinitesimal, y la pared de la tubería. El flujo de masa por unidad de tiempo es $\rho u \Omega$, con Ω el área de la sección transversal. Este flujo varía de una sección a otra y su diferencia, de acuerdo al principio de conservación de la masa, debe ser igual al cambio en el tiempo de la masa almacenada en el volumen de control. Resulta entonces la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \Omega \Delta x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \Omega) = 0 \quad (8)$$

Señalemos que en la Ecuación (8) existe una inconsistencia conceptual. Dicha ecuación es referida a un volumen de control y, por su definición, el volumen no puede cambiar de volumen. La derivada parcial respecto al tiempo sólo se aplica a la densidad y Ω no varía, con lo cual, siguiendo la lógica del volumen de control debería eliminarse la derivada $\partial\Omega/\partial t$. Por otro lado, usualmente en la deducción de la Ecuación (8) se consideran únicamente los flujos a través de las secciones transversales y no se atiende al flujo lateral que surge del desplazamiento de la pared de la tubería. Estas observaciones serán tenidas en cuenta en el desarrollo presentado en el siguiente apartado.

Continuando el desarrollo en la literatura, en la Ecuación (8) se procede a distribuir las derivadas y reagrupar términos:

$$\frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t} + u \frac{\partial\Omega}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

En los textos se expone un pasaje clave en la deducción: las derivadas parciales en los términos que están entre paréntesis son transformadas en derivadas totales.

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + u \frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{d\Omega}{dt} \quad (10)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{dt} \quad (11)$$

Con lo que la Ecuación (9) se reduce a

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

En las igualdades expresadas en las Ecuaciones (10) y (11) se asume implícitamente que la trayectoria o curva característica viene dada por $dx/dt = u$. Primero señalemos que en la literatura se llega a que $dx/dt = u \pm c$, una vez obtenidas las ecuaciones del golpe de ariete y determinadas las curvas de las características. Es decir, que el desarrollo posterior contradice pasajes anteriores en la deducción ($dx/dt = u$). Por otro lado, considerando que se trata de una perturbación al régimen permanente, las perturbaciones no sólo son transportadas por el flujo material (para el cual vale $dx/dt = u$) sino que ahora se superpone la onda de presión. Se sigue que las derivadas parciales deberían mantenerse en (9) sin utilizar las derivadas totales.

El siguiente paso en la deducción consiste en vincular el área y la densidad con la presión en la tubería. Como ambas variables son dependiente exclusivamente de la presión p , a un incremento en la presión corresponden una dilatación de la tubería y compresión del fluido (incremento en Ω y ρ , respectivamente). En la literatura se deducen las siguientes igualdades:

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{D}{eE} \frac{dp}{dt} \quad (13)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dp}{dt} \quad (14)$$

A fin de diferenciar el estado inicial de presurización, conviene distinguir la variación temporal de la espacial. Cuando las variaciones de Ω y ρ ocurren en una sección (esto se debe al cambio local de la presión) los incrementos $\Delta\Omega$ y $\Delta\rho$ están relacionados con el Δp de esa misma sección. En cambio, cuando se analizan los cambios que se deben a una variación espacial de p , la relación entre dichos cambios no es directa. En el instante inicial, la tubería se encontraba sujeta a un gradiente de presión y, por lo tanto, existe un cambio inicial que debería sustraerse en las Ecuaciones (13) y (14) para considerar únicamente los cambios debidos al régimen transitorio. Este aspecto será desarrollado con más detalle en la sección siguiente.

Haciendo los reemplazos de (13) y (14) en (12) se obtiene la primera ecuación del golpe de ariete.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{K} + \frac{D}{eE} \right) \frac{dp}{dt} = 0 \quad (15)$$

La segunda ecuación surge de aplicar la segunda Ley de Newton al volumen de control. Las fuerzas intervinientes son las debidas al campo gravitatorio, al gradiente de presión y a las fuerzas viscosas. La sumatoria de fuerzas, según el eje de la conducción es:

$$\sum F = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} - g\rho \frac{\partial z}{\partial x} - g\rho j \right) \Omega \Delta x \quad (16)$$

La sumatoria de fuerzas es igual a la variación temporal de la cantidad de movimiento du/dt que en la literatura se expresa como:

$$\rho \Omega \Delta x \frac{du}{dt} = \rho \Omega \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (17)$$

En función de lo expuesto anteriormente resulta dudoso que la derivada total se exprese de este modo porque al ser un movimiento perturbado también la densidad cambia y esto debería afectar la cantidad de movimiento. Sin embargo, no se hace mención al respecto en la literatura. Se retornará sobre este punto en la siguiente sección.

Finalmente, igualando (16) y (17) se obtiene la segunda ecuación del golpe de ariete:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + g\rho \frac{\partial z}{\partial x} + g\rho j + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (18)$$

NUEVA DEDUCCIÓN

Deducción de las ecuaciones del golpe de ariete

A continuación se presentará una nueva deducción de las ecuaciones diferenciales del golpe de ariete que introducen el estado inicial de presurización del fluido y la tubería. Además se resolverán las inconsistencias conceptuales mencionadas en el apartado anterior.

Considérese un volumen material $V_m(t)$ que en el instante t está definido por dos secciones transversales, ubicadas en las progresivas x y $x+\Delta x$, y la pared de la conducción. El volumen se desplaza hacia la derecha y en el instante $t+\Delta t$ el volumen ha cambiado de forma, $V_m(t+\Delta t)$, debido a las distintas velocidades del fluido en la superficie del volumen: para la sección x , la velocidad es u mientras que para la sección $x+\Delta x$ la velocidad tiene un incremento $\partial u/\partial x \cdot \Delta x$. Además, la superficie lateral en contacto con la tubería se desplaza debido a la dilatación producto del arribo de la onda de presión. Suponiendo que no se forman cavidades, el fluido se desplazará con la misma velocidad que la pared de la tubería (velocidad v indicada en la Figura 4). Entonces, el volumen material en el instante siguiente, $V_m(t+\Delta t)$, se habrá deformando tanto longitudinalmente como radialmente.

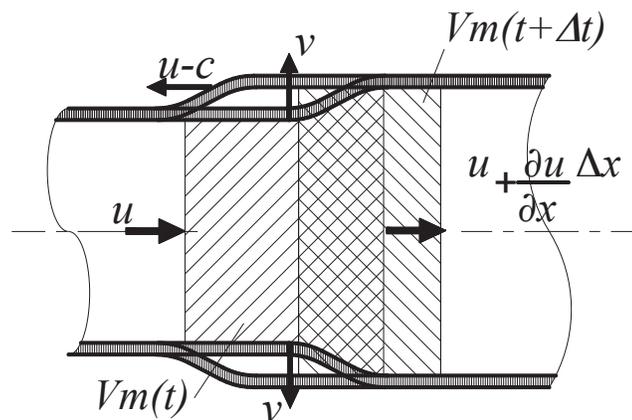


Figura 4 | Evolución del volumen material durante el pasaje de una onda de presión que se desplaza de derecha a izquierda (con velocidad $u-c$). Se ha representado la tubería para el instante t y $t+\Delta t$, y las velocidades en cada cara del volumen material. El volumen material cambia su volumen debido al cambio en la velocidad u y al aumento en el diámetro debido a la dilatación de la tubería. Sin embargo la masa contenida en los volúmenes $V_m(t)$ y $V_m(t+\Delta t)$ es la misma.

La primera ecuación del golpe de ariete se deduce imponiendo la conservación de la masa en el volumen material, es decir, la cantidad de masa en los volúmenes $V_m(t)$ y $V_m(t+\Delta t)$ es la misma. Respecto a la cantidad de movimiento, su variación en los volúmenes $V_m(t)$ y $V_m(t+\Delta t)$ se debe a las fuerzas actuantes. A diferencia de las deducciones presentes en la literatura, en este estudio aplicaremos el teorema de transporte de Reynolds para evaluar las derivadas dm/dt y dCm/dt .

Considérese, en primer término, la masa del volumen material. De acuerdo al principio de conservación y la definición misma de volumen material, la masa en dicho volumen no cambia con el tiempo:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = 0 \quad (19)$$

La derivada material se aplica al volumen de control (que coincide con el volumen material para el instante t) utilizando el teorema de Reynolds:

$$\int_{V_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\Omega_m(t)} \rho(u \cdot n) d\Omega = 0 \quad (20)$$

La primera integral se resuelve fácilmente considerando que la densidad es constante en el interior del volumen:

$$\int_{V_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega \Delta x \quad (21)$$

De acuerdo a la ecuación de estado para los fluidos, la variación de la densidad está determinada por una variación en la presión:

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho}{K} \quad (22)$$

Entonces es posible calcular las derivadas respecto a x y t aplicando la regla de derivación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (24)$$

Tal como se expuso en la sección anterior, se debe considerar el estado inicial para el cual existe un gradiente de presión y, según la Ecuación (23), también existe un gradiente en la densidad. La variación total de ρ es igual a la suma de la variación inicial y aquella debida a un cambio de p en el movimiento perturbado.

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{\Delta p} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|^0 \quad (25)$$

Para la ecuación de continuidad interesa la variación de ρ asociada con el nuevo cambio Δp , por lo tanto, la expresión para la derivada espacial es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\rho}{K} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|^0 \right) \quad (26)$$

La segunda integral requiere analizar los flujos en cada una de las superficies: la sección de aguas arriba, la de aguas abajo, y la superficie perimetral.

$$\int_{\Omega_m(t)} \rho(u \cdot n) d\Omega = -\rho u \Omega + \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) \left(\Omega + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Delta x \right) + \rho v \Delta x \pi D \quad (27)$$

La velocidad radial v es igual al aumento en el radio de la tubería (Δr) que ocurre en un periodo de tiempo Δt , que se determina analizando el comportamiento elástico de la tubería. El aumento en la presión Δp genera un aumento $\Delta \sigma$ en el esfuerzo normal en la pared de la tubería, deducible aplicando el equilibrio de fuerzas:

$$\Delta p D = 2e \Delta \sigma \quad (28)$$

En donde e es el espesor de la tubería. Luego, a una variación en la tensión $\Delta \sigma$ le corresponde una deformación específica ε dada por la ley de Hook: $\varepsilon = \Delta \sigma / E$, en donde E es el módulo de elasticidad del material. La tubería aumenta su perímetro en una longitud de $\pi D \varepsilon$ y, por lo tanto, el aumento radial es $\Delta r = D \varepsilon / 2$. Componiendo todos estos términos se obtiene la variación del radio respecto a la presión:

$$\frac{dr}{dp} = \frac{D^2}{4eE} \quad (29)$$

Y la velocidad v es la variación local de r respecto del tiempo:

$$v = \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{dr}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{D^2}{4eE} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (30)$$

En base a la Ecuación (29) se puede deducir el incremento en el área debido a un cambio en la presión:

$$\frac{d\Omega}{dp} = \left(\frac{D}{eE} \right) \Omega \quad (31)$$

Y análogamente a lo expuesto para la densidad, se determinan las derivadas parciales $\partial \Omega / \partial x$ y $\partial \Omega / \partial t$:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \left(\frac{D}{eE} \right) \Omega \frac{\partial p}{\partial t} \quad (32)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \left(\frac{D}{eE} \right) \Omega \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^0 \quad (33)$$

Expandiendo los productos en la Ecuación (27), despreciando los infinitésimos de orden superior, luego reemplazando términos con las Ecuaciones (24), (26), (30), (32) y (33) y dividiendo por el volumen, se obtiene de la Ecuación (20):

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho D}{eE} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u \rho}{K} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^0 + \frac{u \rho D}{eE} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^0 = 0 \quad (34)$$

Finalmente, reagrupando términos y simplificando teniendo en cuenta la expresión de la celeridad de la onda de presión c con las Ecuaciones (II) y (III):

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{u}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|^0 = 0 \quad (35)$$

Obsérvese que la nueva Ecuación (35) difiere de la anterior Ecuación (15) en el nuevo término de gradiente de presión para el instante inicial que da cuenta del estado de compresión del fluido y dilatación del caño.

A continuación se aplicará el mismo procedimiento para obtener la ecuación de la cantidad de movimiento. De acuerdo a la segunda Ley de Newton, la variación de la cantidad de movimiento (según el eje del conducto) del volumen material es igual a la suma de las fuerzas actuantes proyectadas según el eje x (F_x):

$$\frac{dCm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho u dV = \sum F_x \quad (36)$$

Se consideran tres fuerzas actuantes: la debida al campo gravitatorio, al gradiente de presión y los esfuerzos de corte viscosos. El campo gravitatorio actúa sobre la masa del volumen material generando un peso. El peso interviene en la ecuación anterior en la medida que, debido a la inclinación de la tubería, posee una componente longitudinal:

$$F_g = -g\rho x\Omega\Delta\frac{\partial z}{\partial x} \quad (37)$$

La variación de la presión entre las superficies del volumen material, ubicadas en las progresivas x y $x+\Delta x$ da lugar a una fuerza según la dirección del flujo:

$$F_{\Delta p} = -\Omega\frac{\partial P}{\partial x}\Delta x \quad (38)$$

Y las fuerzas viscosas pueden representarse mediante su efecto en la caída de presión. En una tubería horizontal de diámetro constante se observa una caída de presión Δp , necesaria para mantener el fluido en movimiento cuando se presentan fuerzas viscosas que tienden a retardarlo:

$$\Delta p = -g\rho j\Delta x \quad (39)$$

En donde j se determina con la ecuación de Darcy-Weissbach:

$$j = \frac{f}{D}\frac{u|u|}{2g} \quad (40)$$

La fuerza viscosa tiene la misma forma matemática que la fuerza de presión:

$$F_{\mu} = -\Omega g\rho j\Delta x \quad (41)$$

Con respecto al cambio en la cantidad de movimiento, se aplica nuevamente el teorema de transporte de Reynolds, considerando ahora, como variable intensiva, el producto de la densidad y la velocidad (ρu):

$$\frac{d}{dt}\int_{V_m(t)}\rho u \cdot dV = \int_{V_m(t)}\frac{\partial \rho u}{\partial t}dV + \int_{\Omega_m(t)}\rho u(u \cdot n)d\Omega \quad (42)$$

La primera integral del miembro de la derecha se integra y luego se distribuye la derivada parcial temporal:

$$\int_{V_m(t)}\frac{\partial \rho u}{\partial t}dV = u\frac{\partial \rho}{\partial t}\Delta x\Omega + \rho\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x\Omega \quad (43)$$

La segunda integral se resuelve considerando los flujos en toda la superficie del volumen de control:

$$\int_{\Omega_m(t)}\rho u(u \cdot n)d\Omega = \rho u(-u\Omega) + \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x}\Delta x\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right)\left(\Omega + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\Delta x\right) + \rho u(v\Delta x\pi D) \quad (44)$$

En las Ecuaciones (43) y (44), se procede a reemplazar las variaciones en la densidad por la respectiva variación de presión, y la velocidad radial v por la Ecuación (30). Luego se expanden los productos descartando los infinitésimos de orden superior; y la variación en el área se relaciona con la variación de la presión (teniendo en cuenta lo indicado respecto a la deformación inicial). De este modo se obtiene la expresión de la variación de la cantidad de movimiento en el volumen de control:

$$\frac{dCm}{dt} = \left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + 2u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + u\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{u^2}{c^2}\frac{\partial \rho}{\partial x} \right] \Delta x\Omega \quad (45)$$

Aparecen nuevos términos debido a la compresibilidad del fluido y a la dilatación de la tubería, que aumentan la cantidad de movimiento del volumen material. La ecuación puede simplificarse combinándola con la ecuación de continuidad. Se procede a multiplicar la Ecuación (35) por la velocidad u y así se eliminan los nuevos términos introducidos en (45):

$$\frac{dCm}{dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x \Omega \quad (46)$$

Igualando la variación de Cm con las fuerzas actuantes y dividiendo por el volumen:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + g\rho \frac{\partial z}{\partial x} + g\rho j + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (47)$$

La nueva ecuación de cantidad de movimiento resulta ser igual a la Ecuación (18), presente en la literatura. Sin embargo, en el desarrollo actual se ha aplicado el teorema de transporte de Reynolds, diferenciando consistentemente entre volumen de control y volumen material, e introduciendo el estado de presurización en el desarrollo deductivo.

Verificación de las ecuaciones

A continuación se procede a deducir la ecuación de las curvas características. En general, se emplea la altura piezométrica H en lugar de la presión p . Dado que se ha introducido el estado de presurización inicial en la tubería, conviene definir una nueva variable, H^* , que tenga en cuenta únicamente el efecto del golpe de ariete: $H^* = H - H^0$, en donde H^0 es la altura piezométrica del régimen permanente antes que se produzca la perturbación. Teniendo en cuenta esta definición y las siguientes igualdades: $\partial H^0 / \partial x = -j^0$ (con j^0 la pérdida de energía por unidad de longitud en el instante inicial), $\partial z / \partial t = 0$, $\partial H^* / \partial x = \partial H / \partial x + j^0$, se realiza el cambio de variables en las Ecuaciones (35) y (47), y se las divide por el peso específico:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial H^*}{\partial t} + u \frac{\partial H^*}{\partial x} \right) = 0 \quad (48)$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial x} - j^0 + j + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (49)$$

La ecuación de las características se obtiene haciendo una combinación lineal de las ecuaciones del golpe de ariete. Llamando E_1 a la Ecuación (48) y E_2 la Ecuación (49), la combinación $\lambda E_1 + E_2 = 0$ también debe ser válida:

$$\frac{1}{c^2} \left[\lambda \frac{\partial H^*}{\partial t} + (\lambda u + c^2) \frac{\partial H^*}{\partial x} \right] + \frac{1}{g} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + j - j^0 = 0 \quad (50)$$

Donde los términos entre corchetes se transforman en diferenciales totales,

$$\frac{\lambda}{c^2} \frac{dH^*}{dt} + \frac{1}{g} \frac{du}{dt} + j - j^0 = 0 \quad (51)$$

siempre que se cumplan las condiciones:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\lambda u + c^2}{\lambda} = u + \lambda \quad (52)$$

Y despejando se obtiene que:

$$\lambda = \pm c \quad (53)$$

$$\frac{dx}{dt} = u \pm c \quad (54)$$

Que es el resultado que se esperaba encontrar, a saber: la onda se propaga respecto al sistema inercial con una celeridad c superpuesta al movimiento del fluido u .

Finalmente, se procede a verificar las ecuaciones por dos vías: primero, mediante una inspección analítica de las Ecuaciones (35) y (47), y luego presentando la aplicación de la Ecuación (51) al caso de estudio.

Considérese una condición inicial con fluido incompresible y tubería rígida: la conducción posee diámetro constante y la velocidad no varía con el recorrido, esto es, $\partial u / \partial x = 0$. Aplicando esta condición en la ecuación de continuidad se sigue que:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_0 = 0 \quad (55)$$

Cuando no hay perturbaciones la variación local de la velocidad es también nula, $\partial u / \partial t = 0$, la aceleración es nula y la ecuación de cantidad de movimiento se reduce a un balance de fuerzas:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + g\rho \frac{\partial z}{\partial x} + g\rho j = 0 \quad (56)$$

Es decir que el gradiente de presión se debe a la variación altimétrica de la tubería y a las pérdidas de carga por el efecto de viscosidad, tal como sucede en el régimen permanente (y fluido incompresible). Esto significa que los gradientes de presión en la Ecuación (55) son iguales. Como resultado surge que la variación local de la presión es nula: $\partial p / \partial t = 0$, y las variables del escurrimiento permanecerán constante en el tiempo.

Se realizó una nueva simulación, llamada “Corrida N° 3”, imponiendo las condiciones iniciales del régimen permanente con fluido incompresible dadas por las Ecuaciones (6) y (7). Se discretizaron las nuevas Ecuaciones (35) y (47) empleando la nueva expresión para las curvas características, la Ecuación (51). Las condiciones en los bordes están dadas por las expresiones (4) y (5). El resultado de la simulación se expone en la Figura 2. Se puede observar que la altura piezométrica permanece constante, produciendo el mismo resultado que la simulación “Corrida N° 2”.

CONCLUSIONES

Las ecuaciones diferenciales del golpe de ariete presentes en la literatura técnica actual producen un fenómeno anómalo cuando se consideran las ecuaciones de régimen permanente y fluido incompresible para definir el estado inicial del sistema.

Es fenómeno anómalo se debe a que no es correcta la suposición de incompresibilidad del fluido, aunque los resultados numéricos den diferencias muy pequeñas respecto al cálculo de las condiciones iniciales usando las ecuaciones del golpe de ariete que efectivamente consideran la compresibilidad del fluido y elasticidad del material de la conducción. Sin embargo, la primera opción presenta la ventaja de ser aplicable en modo directo mientras que la segunda requiere de un cálculo numérico más complejo (resolución de un sistema de ecuaciones no lineales). En el presente trabajo se ha presentado una tercera opción que consiste en incorporar el estado de presurización inicial de la conducción en las ecuaciones del golpe de ariete. Las nuevas ecuaciones se emplean con las condiciones iniciales calculadas con la suposición de fluido incompresible y tubería rígida. El estudio analítico de las ecuaciones y su aplicación al caso de estudio validan esta nueva aproximación para la evaluación del golpe de ariete.

Mediante el empleo de conceptos claves de la mecánica de los fluidos, tales como volumen material, volumen de control, teorema del transporte de Reynolds y curva característica, se ha elaborado una nueva deducción de las ecuaciones generales. La nueva deducción resuelve las inconsistencias conceptuales detectadas en las deducciones presentes en la literatura actual.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a dos revisores anónimos por la lectura del primer manuscrito del presente artículo. Los aportes realizados han enriquecido significativamente el presente trabajo.

REFERENCIAS

- Allievi, L. (1903). Teoria generale del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione (colpo d'ariete). Associazione Elettotecnica Italiana. Unione Cooperativa Editrice. Italia.
- Bergant, A., Simpson, A. R. (1994). Estimating unsteady friction in transient cavitating pipe flow. *2nd International Conference on Water Pipeline Systems*, 24-26 May, Edinburgh, Scotland, 3-15.
- Bergant, A., Simpson, A.R., Vitkovsky, J. (2001). Developments in unsteady pipe flow friction modeling. *Journal of Hydraulic Research*, 39(3), 249-257. doi:10.1080/00221680109499828
- Bergant, A., Tijsseling, A.S., Vitkovský, J.P., Covas, D.I.C., Simpson, A.R., Lambert, M.F. (2008a). Parameters affecting water-hammer wave attenuation, shape and timing. Part 1: Mathematical tools. *Journal of Hydraulic Research*, 46(3), 373-381. doi:10.3826/jhr.2008.2848
- Bergant, A., Tijsseling, A.S., Vitkovský, J.P., Covas, D.I.C., Simpson, A.R., Lambert, M.F. (2008b). Parameters affecting water-hammer wave attenuation, shape and timing. Part 2: Case studies. *Journal of Hydraulic Research*, 46(3), 382-391. doi:10.3826/jhr.2008.2847
- Chadwick, A., Morfett, J., Borthwick, M. (2013). *Hydraulic in Civil and Environmental Engineering*. 5ª Edición, CRC Press, London, UK.
- Chaudry, M. H. (2014). *Applied Hydraulic Transients*. 3ª Edición. Springer. doi:10.1007/978-1-4614-8538-4
- Choon, T.W., Aik, L. K., Aik, L. E., Hin, T. T. (2012). Investigation of Water Hammer Effect Through Pipeline System. *International Journal on Advanced Science Engineering Informational Technology*, 2(3), 48-53. doi:10.18517/ijaseit.2.3.196
- Frizell, J. P. (1898). Pressures resulting from changes of velocity of water in pipes. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 39, 1-18.
- Fuertes, V. S., Izquierdo, J., Iglesias, P. L., Cabrera, E., Garcia-Serra, J. (1997). Llenado de tuberías con aire atrapado. *Ingeniería del Agua*, 4(3), 53-63. doi:10.4995/ia.1997.2730
- Hoffman, J. D. (2001). *Numerical methods for engineers and scientist*. 2ª Edición. Marcel Dekker, New York, USA.
- Hou, Q., Tijsseling, A. S., Laanearu, J., Annus, I., Koppel, T., Bergant, A., Vuckovic, S., Anderson, A., Westende, J. M. C. (2014). Experimental investigation on rapid filling of a large-scale pipeline. *Journal of Hydraulic Engineering*, 140(11). doi:10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000914
- Karadzic, U., Bulatovic, V., Bergant, A. (2014). Valve-induced water hammer and column separation in a pipeline apparatus. *Journal of mechanical Engineering*, 60(11), 742-754.
- Korteweg, D. J. (1878). *Über die voortplantingsnelheid van golven in elastische buizen*. Tesis doctoral. Universidad de Amsterdam, Países Bajos.
- Mambretti, S. (2015). *Water hammer simulations*. WIT Press. Southampton, UK.
- Pérez Farrás, L., Guitelman, A. (2005). *Estudio de transitorios: golpe de ariete*. Universidad de Buenos Aires, Argentina.
- Tijsseling, A. S., Anderson, A. (2007). Johannes von Kries and the History of Water Hammer. *Journal of Hydraulic Engineering*, 133(1), 1-8. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(2007)133:1(1)

Wang, R., Wang, Z., Wang, X., Yang, H., Sun, J. (2014). Water hammer assessment techniques for water distribution systems. *Procedia Engineering*, 70, 1717-1725. doi:10.1016/j.proeng.2014.02.189

Zout, F., Hicks, F., Steffler, P. (2002). Transient flow in a rapidly filling horizontal pipe containing trapped air. *Journal of Hydraulic Engineering*, 128(6), 625-634. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(2002)128:6(625)